蓋然的推論法入門

松永　久*

1. はじめに

山陽特殊製鋼㈱では製造メーカーとして当然のことであるが，新入社員の教育プログラムの一環として，大学卒技術系新入社員に対して，いわゆるSQC，統計的品質管理法の序論，QC7つ道具からはじまり回帰分析，分散分析，実験計画法の概要迄を継続的に教育している。第1年度には導入教育の中での2.5時間のQC概論からはじめ，延べ8週，計32時間のQC一般コース，パソコン活用コースを行う。第2年度には週に丸1日，延べ7週の講義・演習からなるQCアドバンスコース，その後の演習テーマの発表会を義務づけている。座学は第2年度までであるが，その後も3年間，技術系QC活用コースと称し，実地演習を主体とするQCのフォローアップ教育を行っている。

技術系新入社員に対するアンケート調査によれば，ごく一部の例外を除けば，相当の割合の技術系新入社員は大学時代に統計学の講義を全く受講せずに卒業してきている。これは，戦後日本製造業の復興，発展の渦中にあって製造技術者としての道を歩んできた筆者にとって意外な印象を受けるが，時代の流れとして，そういうものだと認識せざるを得ない。そのような状況も踏まえて第2年度のQCアドバンスコースの座学の最後に「統計的手法の有効性と業務への活用について」と題し，いわゆる推測統計学の講義とは別の切り口から毎年講話を行っており，本稿ではこの講話をベースに蓋然的推論法の考え方について解説してみたい。

学校時代に必然的推論法しか学んでこなかった若い技術者の業務処理・問題解決の参考になれば幸いである。

2. 蓋然的推論法とは

「蓋然的」とはあまりなじみのない言葉ではあるが，「必然的」に対応する言葉で，「必然的」とは“かならず”，“100%”ということを意味し，それに対し，「蓋然的」とは“多分”，“おそらく”，“いつもそうとは限らないが”というような意味である。したがって，「蓋然的推論法」とは，ある前提から出発して推論の結果得られる結論が，いつも，必ず，こうなるというのではなくて，こうなることもあるだろうし，こうならないこともあるだろう，しかし，こうなる確率は相当高いだろう，あるいは，相当低いだろう，という推論である。いつも，100%成立しないからといって，此の推論が間違っているということにはならないのは当然である。

非常に複雑な人間関係，社会関係での推論では，まず必然的推論法が成立する場面はなく，ほとんどの推論が蓋然的推論しか成立していないことは論を待たず納得できることであろう。

一方，学校時代に習う推論法は基本的には「必然的推論法」しか習わない。

たとえば，

・1足す1は2になるだろう（になる）[1＋1＝2]

とか，

・9の9倍は81になるだろう（になる）[9×9＝81]

とかいう類の推論は，何時でも，何処でも，必ず，100%成立する推論である。

しかし，技術の世界であっても，現実の技術的課題は，何時でも，何処でも，必ず，100%成立する議論ではない。たとえば，製鋼分野の技術的課題の中で例を挙げれば，

・鋳造温度を下げれば，鋳片内部の偏析は減少する（するだろう）

とか，

・鋳造温度を上げれば，耐火物原単位は増加しても大型介在物は減少する（するだろう）

というような推論は，当然のことではあるが，いつも，100%成立する議論ではない。しかし，大局としては正しい議論である。

学校時代に習う技術論では必然的推論が成立し，現実の技術的課題では必然的推論が成立せず，蓋然的推論しか成立しないのは何故なのであろうか。それは，一言でいえば，意識しようが意識していまいが，ある推論の中に関与する要因の数の多寡の差である。学校時代に習う本来技術，たとえば，冶金学，応用化学，機械工学などを構成する学問体系，熱力学，反応速度論，材料力学等は，デカルトから始まったとされるいわゆる要素還元論に基づき，枝葉末節

＊　顧問，工博

を切り捨て，本質的な要因のみを取り上げて単純化して構築されているので必然的推論が成立するのである。しかし，現実的技術課題では，本質的，且つ着目している因子以外に枝葉末節な因子として，当然影響の程度が測定精度，検出限界以下でネグリジブルだとしても，極端な話ではあるが，月の引力，地球の自転によるコリオリの力まで影響している。一つの枝葉末節な因子の影響がネグリジブルで且つ検出不能なものであっても，0でない以上，また，現実にはその影響を完全に切り捨てることが出来ない故に，枝葉末節な因子の数が多ければ，全体の総和は無視し得ない変動となって現れてくることは明らかであろう。したがって，現実の技術課題では，着目している要因以外の因子および枝葉末節な多数の因子の変動の影響で，必然的推論が成立せず，蓋然的推論しか成り立たないのである。

そのため，現実の技術課題を解決するには充分注意して前提条件，データから論理展開を行わないと，一見筋が通っているようでも図1に示すような「風が吹けば，桶屋が儲かる」式の誤った蓋然的推論を行ってしまう羽目に陥ることがしばしば見かけられる。「風が吹けば，桶屋が儲かる」というような極端なケースについては誰でもその推論の誤りを直感的に指摘できる。しかし，これが，本来技術に裏打ちされ，経験的に推論されると，往々にして技術的に無駄な，無意味な対応策に振り回され，何よりもスピードが要求される時代でありながら，やっている本人は仕事をしたつもりになっていても，残念ながら技術課題は解決しないまま時間のみが経過することになってしまう。

風が吹く⇒埃が舞い上がる→眼病を患う人が増える→めくらが増える→三味線弾きが増える→三味線需要が増える→三味線の材料である猫皮の需要が増える→多くの猫が殺される→鼠が増える→鼠にかじられる桶が増える→桶の需要が増える⇒桶屋が儲かる

図1　「風が吹けば，桶屋が儲かる」推論

3. 論理学の基礎，必要条件と十分条件

技術的課題を効率的に解決していくためには，どのような分野であれ，定石化されているQCストーリーに則り，感情，願望を交えず，冷酷に事実関係，データを把握し，本来技術上の知識・経験を駆使して，更にSQC，推測統計学を活用して正しい蓋然的推論を行い，効果的な対応策を立案し，検証していくことが必要であることは論を待たない。

その際重要なのは，事実関係，データに基づいて因果関係を推論するということは，いわゆる「逆問題（inverse problem）」を解くことであり，ある着目している事実関係，データを生起しうる原因系は，一つとは限らず，複数，多数存在しうるという認識である。この複数存在しうる原因系の中から解決すべき技術的課題を支配している真の原因を効率的に特定していくためには，本来技術上の知識，経験だけでは不十分であり，技術的な広い視野と蓋然的推論法の知識，経験が必要である。

ある技術的課題を解決することイコール客観的な事実関係，データに基づいて逆問題を解くこととしたときに必要な論理学の基礎を復習しておこう。

まず，

AならばBである

という命題が「真」である時に可能である次の3つの論理展開：

（ 逆 ）Bならば，Aである

（ 裏 ）Aでなければ，Bでない

（対偶）Bでなければ，Aでない

が正しいかどうかの議論である。それぞれの論理展開は括弧書きしたように，それぞれ逆，裏，対偶と呼ばれる。じっくり考えてみれば，ほぼ自明であるが，「逆は必ずしも真ならず」というフレーズがあるように，逆は正しくない。また，裏も正しくない。しかし，対偶は常に正しい。

次に必要条件と十分条件について考えてみよう。簡単な例として，

$x=1$ならば，$x^2=1$である

は正しいが，その逆，「$x^2=1$ならば，$x=1$である」は正しくない。いうまでもないが，$x=-1$でも$x^2=1$になるからである。

「$x=1$ならば，$x^2=1$である」という命題で，

$x=1$は$x^2=1$が成り立つための十分条件

$x^2=1$は$x=1$が成り立つための必要条件

という。$x^2=1$が成り立つための必要且つ十分な条件は，「$x=1$または$x=-1$」ということになる。

ある正しい命題，客観的事実・データから出発して，逆問題としてある技術課題の正しい解決策を迅速に見いだすためには，以上述べた逆，裏，対偶の論理展開の是非，命題が成立するための必要条件，十分条件を充分配慮しながら推論を行っていく必要がある。

例えば，ある目的特性値とある因子との間に，統計的に有意な相関関係が事実データとして認められたからといって，即，因果関係があり，効果的な操作要因として使えるということにはならない。この認識は重要なポイントである。笑い話に近いが，男性の身長とその人の叔父の身長との間には強い相関が認められる，だからといって，自分の息子の身長を少しでも伸ばすために，自分の兄弟にいくらカルシウムの多い栄養のあるものを食べさせても滑稽なだけである。統計的に有意な相関関係が因果関係を意味し，効果的な操作要因として技術課題解決のために使えるかどうかの推論には，本来技術上の広い視野からの考察と因子

間の交絡に関する統計的なチェックが必要である。

4. 多要因系の因果関係における推論の現実的取り扱い

今，ある特定の品質特性であれ，コストを支配する原単位であれ，何らかの品質特性値であれ，調査，解析したい目的の特性値をy，目的特性値に影響する主要ないくつかの要因，管理状態にあるいくつかの要因から，個別にはネグリジブルな枝葉末節な多数の要因までをx_1，x_2，・・・・・，x_nとする。通常の解析では，目的特性値と本来技術並びに過去の経験から導かれる主要ないくつかの要因について図2に示すような散布図を描くところから始まり，相関分析なり，回帰分析なりを行って，有意な要因を抽出し，本来技術・経験と対比しながら解決策を立案，確認していくことになる。

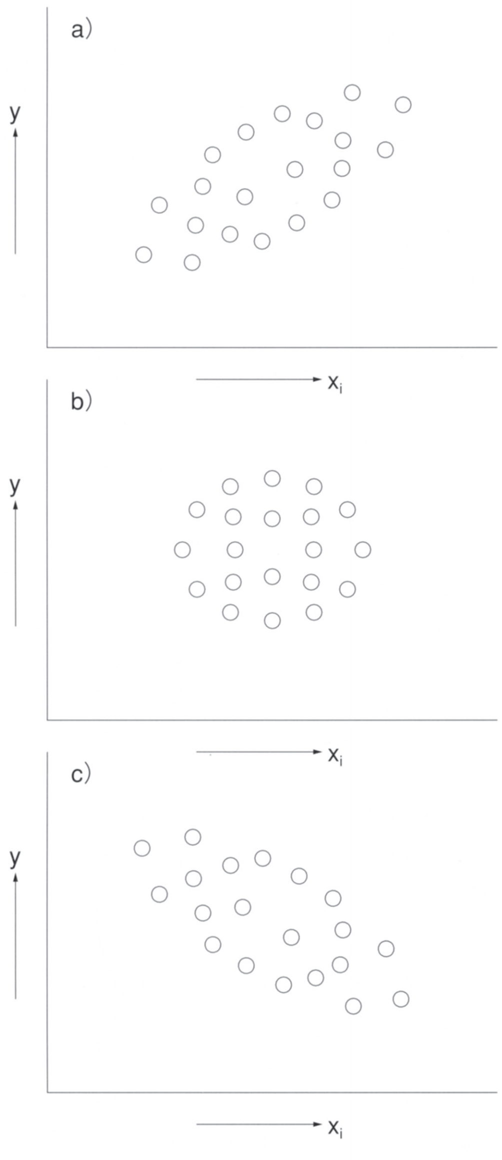

図2　x_iとyの相関

この過程を数学的にきちんと考えてみよう。目的特性値yと要因x_1，x_2，・・x_i・・・，x_nとがある複雑な関数関係でしばられていて，

$$y=f\,(x_1,\ x_2,\ \cdot\cdot x_i\cdot\cdot\cdot,\ x_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

と表されるとしよう。

今，着目している制御可能な主要な要因x_iについてテーラー級数展開が可能であるための必要且つ十分条件，即ち，

①特性値yが連続であること

②着目している主要な要因x_iについてm回微分可能であること

が成立しているとすれば，また，着目している主要な要因x_i以外のいくつかの主要な要因は必要な程度の管理状態にあるとすれば，$x_i=x_{i0}$近傍での1次近似としてx_i以外の要因の影響を誤差項ε_{ij}としてまとめ，x_iの項をくくり出せば

$$y \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x_i-x_{i0})\ +c_j$$

$$\fallingdotseq a_i x_i+b_i+\varepsilon_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

となる。幸い，現実に遭遇する技術的課題では経験的に前提条件①②は成立しており（2）式の取り扱いが可能である。

したがって現実のデータを解析する場合，今着目している要因x_nの影響を確認するために近似式としての（2）式が充分機能するにはx_i以外の主要な要因が必要な程度に管理状態になければε_{ij}の項が大きく変動し，確認したい着目している要因x_iの影響が消されてしまい，本来技術上の知識・経験からは無視し得ない要因が統計的に有意とならないことになる。このような場合，QC7つ道具で強調されている層別という手法が重要であるが，残念なことにε_{ij}を小さくするために層別すればするほど，データ数が少なくなってしまって，逆に効果が検出できなくなってしまうという矛盾が生じる。一方，重相関分析という手法もあるが，第7項で述べるような留意点がある。数学的には確立していないが，経験的にはいわゆる「逐次層別修正法」がかなり有効であり，試みてみる価値は充分にあることを指摘しておこう。

5. バラツキとは何か－群内変動と群間変動

学校時代に必然的推論しか訓練されてこなかった人が現実データの大きなバラツキに遭遇した時，本来あってはならないことが起こっているという印象を受け，ショックを感じるようである。しかし，ハイゼンベルクの不確定性原理の支配する量子力学とは全く異なるマクロの世界とはいえ，これまで説明してきたように多数の枝葉末節な因子の変化にさらされている現実の世界では，バラツキのある方が常態であり，逆に，もしバラツキがないとすれば，極めて不自然であり，現実ではないという認識に立てば，蓋然的推論法の重要性が自ずと理解されてこよう。

バラツキとは，数学的に言えば，真値あるいは期待値からのずれの2次モーメントであり，全体の母集団を構成する各母集団のバラツキを σ_i^2とすれば，全体の母集団のバラツキ σ^2は加法性が成立し，

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots\cdots + \sigma_n^2 \cdots\cdots \quad (3)$$

となる。この加法性が成立するが故に，今着目している要因群による変動と枝葉末節な要因群による変動とを分離することが出来，F検定を用いたいわゆる分散分析によるデータ解析が可能になるのである。

いろいろな見方はあるが，SQCの原点は1930年代の終わりに確立されたシューハートの管理図法であろう。シューハートの管理図法の神髄は，全体のバラツキをやむを得ない（許容できる）バラツキと管理すべき，コントロールすべきバラツキに分けたことにある。やや恣意的な表現であるが，やむを得ないバラツキを群内変動と呼び，管理すべきバラツキを群間変動と呼ぶのだと考えると内包するところが分かりやすい。

6. 交互作用項の意味合い

ある狭い本来技術論からの推論では，着目している制御可能な主要な要因x_iは目的特性値yに対し，たとえば正の効果をもつ（図2-a）筈だとその分野の専門技術者が信じている場合でも，実際にデータを取ってみると，本来技術論とは全く逆の負の効果（図2-c）が得られて吃驚するというようなことはかなりしばしば経験することである。この時，現実のものづくりでは統計的に有意な交互作用はしばしば存在するのだ，という認識を持っていれば，その事実，データを巡って右往左往することはないが，交互作用項に対する認識が薄いと，たとえば，

・本来技術論を重視するあまり，これはデータがおかしい，信用できないといって，事実関係を無視したり，
・逆に本来技術論を軽視して，だから，理論なんて役に立たないのだ，と経験万能主義を振りまわしたり，

といった奇妙な議論に巻き込まれ，折角のデータ，先人の汗と努力から得られた本来技術理論を活用せず，肝心の技術的課題の解決が遅れてしまうことになる。

したがって，交互作用というものが何故存在するのか，ということを数学的にきちんと理解しておくことはこういった奇妙な議論に巻き込まれないためにも必要なことである。

前節で述べた多要因系の因果関係（1）式から考えよう。

$$y=f\ (x_1,\ x_2,\ \cdot\cdot x_i \cdot\cdot\cdot,\ x_n) \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

この関数はテーラー級数展開が可能であり，前節では1次近似について説明したが，ここでは要因x_1，x_2の2次近似を考える。1次近似を表した前節（2）式は2次近似としては，

$$y=a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{12}x_1^2+a_{22}x_2^2+ax_1x_2+b_3+\varepsilon_{1j} \cdots\cdots \quad (4)$$

と表すことが出来る。

しかし，ニュートン近似則から$a_{12}x_1^2$および$a_{22}x_2^2$は充分小さいとすれば（4）式は，

$$y=a_{11}x_1+a_{21}x_2+ax_1x_2+b_4+\varepsilon_{1j} \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

となり，x_1に着目して変形すれば，

$$y=(a_{11}+ax_2)x_1+a_{21}x_2+b_5+\varepsilon_{1j} \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

と書ける。

ここでx_1の係数（$a_{11}+ax_2$）に着目してみると，これはx_2の関数になっており，x_2，a_{11}，a，の値の組み合わせ状況によって図3に示すように，あるときは右上がりに，ある時は右下がりになるということはよく経験することであり，これが交互作用の本質である。例えば，本来技術的に鋼中水素含有量が間接的に影響するような現象は，年間を通じてみると絶対水蒸気分圧が変動するので，年間という大きなサイクルでドリフトすることはよく経験する。

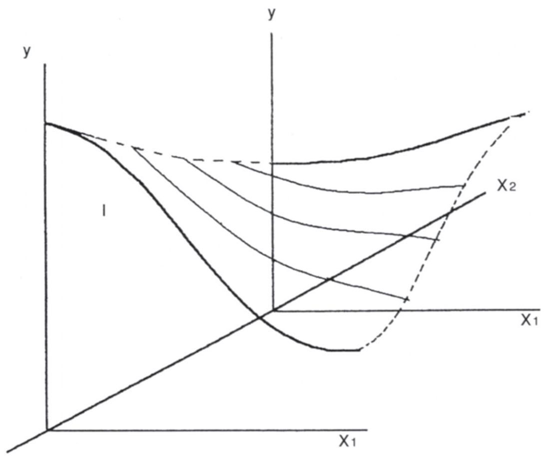

図3　x_1の効果に及ぼすx_2の交互作用

7. 重相関分析時の留意点

コンピュータの驚異的発展により我々が手元に置いて使うパソコンの計算速度はペンティアムⅡマシーンの場合1969年にアポロ11号が月に行ったときのNASAのメインフレームよりも1桁以上2桁近く速くなってしまった。その結果，JUSE-QCASを使うにせよ，Excelでマクロを組むにせよ，大量のデータを使って多要因系の重相関分析を行うことが，見かけ上，実に簡単に出来る時代となった。

しかしながら，コンピュータの力に任せて，ひたすら大量のデータの重相関分析を行っても，重相関分析結果が示す各要因の効果が本来技術上の知識・経験と矛盾したり，あるいは解析結果を信じて取った対策が有効でなかったりということはよく経験することである。こういうことが生

じる最も可能性の高い原因は，要因間の交絡である。裏返せば，独立でない要因をひたすら取り込んで，見かけ上の解析を行っている場合である。

本来逆解析としての重相関分析が可能であるための数学的前提の一つに「各要因は独立である」という前提がある。即ち，ある要因x_iと別の要因x_jは互いに縛られていない：

$$\partial x_i / \partial x_j = 0 \quad (i \neq j) \qquad (7)$$

という前提が成り立っていなければならない。$\partial x_i / \partial x_j \neq 0$ $(i \neq j)$ の場合，要因x_iと要因x_jとの間に交絡があるという。言い換えれば，ある要因が変化すると自動的に動くような独立要因でない因子を要因として取り上げると，数学的な前提が崩れるということである。何処まで近似的に（7）式が成り立っているかの検証は必要であるが，例えば，鋼の中の成分を要因として取り上げる場合，全成分の総和は常に100%であるから，すべての成分は独立要因ではない。普通鋼の場合，構成成分の大部分はFeであるから，近似的には充分（7）式が成立しているが，高合金鋼の場合はどの成分を独立要因として取り上げるかは，本来技術上の知識・経験による十分な検討が必要である。

8. 終わりに

以上，学校時代には必然的推論法しか学んでこなかった若い技術者・研究者を念頭に置き，SQC・推測統計学の標準教科書とは別の視点から，統計学を活用した蓋然的推論法のイントロに関連する事項をいくつか解説してみた。

振り返れば，戦後日本の製造業の，外国から見れば驚異的な発展を支えた要素技術の一つがSQC，TQC，TQMと拡がってきた日本的品質管理であることはいうまでもない。ISO9000シリーズというユーザー側から見た品質システム規格の登場で更なる拡張が要請されてはいるが，この日本的品質管理の原点はあくまでSQCである。SQCそのものも，時代の流れとともに，コンピュータ・情報技術の発展とともに大きく膨らんできている。サイエンスSQCの動きなどはその証左であろう。多変量解析などは，いくら1940年代初めには数学的に既に完成していたとしてもタイガー計算機の時代にはその応用は実際問題として考えられなかった例である。また，ややもすれば，単純な発想からトレードオフと見なされがちな品質とコストとの関係にしても，コンピュータの発達に伴い，それぞれの管理項目に対する単なる1次元の管理図から2次元の管理図への拡張が議論されている時代である。

本稿が，これからのグローバルでスピードの要求される新しい時代の製造業を支えて行く若い技術者・研究者の技術課題解決上の，業務処理上の何らかの参考になれば望外の幸いである。